Dodatek

Dominik Ogrin

December 14, 2020

Uvod v izpeljavo višine plamena Predstavljajmo si zelo majhen kos zraka, ki spodaj pri stenju vstopa v plamen. Nato se v njem zgodi gorenje, zaradi česar se segreje in raztegne. Visoka temperatura povzroči, da začne oddajati svetlobo v vidnem delu spektra in se torej hladi. Ker se raztegne, se mu zmanjša gostota, zaradi česar nanj začnejo delovati vzgonske sile. Naš kos zraka se torej premika navzgor in hkrati hladi. Iz tega je torej jasno, da če bi poznali njegovo lego v odvisnosti od časa in čas, ko neha oddajati vidno svetlobo, bi lahko določili višino plamena. Čas merimo od takrat, ko so v kosu zraka potekle reakcije in je ravno dosegel najvišjo temperaturo na poti skozi plamen. Označimo relevantne količine.

temperatura okoljnega zraka	T_0
gostota okoljnega zraka	ρ_0
gravitacijski pospešek	g
masa kosa zraka	m
površina kosa zraka, s katero seva	S
prostornina kosa zraka	V
temperatura kosa zraka takoj po vseh reakcijah	$T_\star$
specifična toplota zraka	c_p
Stefanova konstanta	σ
temperatura kosa zraka, med potjo navzgor	T
gostota kosa zraka, med potjo navzgor	ρ
povprečna temperatura plamena	T_p
najnižja temperatura, pri kateri opazimo, da zrak sveti	T_s
število molekul parafina na volumen v okolici stenja	u
energija, ki se sprosti na molekulo parafina	β
aktivacijska energija kisika	E
splošna plinska konstanta	R
čas, da se kos zraka ohladi s $T_\star$ na T_s	τ

Preden nadaljujemo, pripomba. Obravnava s kosi zraka dobro velja, če so kosi zraka dovolj majhni, da so relevantni parametri znotraj posameznega kosa približno homogeni, in dovolj veliki, da jih lahko obravnavamo z makroskopskimi količinami. Zgoraj navedenim m, V in S težko damo dejansko vrednost, vendar se bodo v zaključni enačbi vedno pojavljali zgolj v razmerjih.

Izpeljava višine plamena Ugotovimo torej pospešek našega kosa. Zapišimo Newtonov zakon za vzgon in uporabimo splošno plinsko enačbo:

$$a = (\frac{\rho_0}{\rho} - 1)g = (\frac{T}{T_0} - 1)g$$

Pospešek koščka zraka v plamenu je torej odvisen od njegove temperature. Če uporabimo ohranitev entalpije:

$$mc_p dT = -S\sigma T^4 dt$$

Integrirajmo, da dobimo izraz za $T(t)$:

$$T(t) = T_\star(1 + 3\frac{3S\sigma}{mc_p}t)^{-\frac{1}{3}}$$

Izrazimo pospešek:

$$a = (\frac{T_\star}{T_0}(1 + 3\frac{S\sigma T_\star^3}{mc_p}t)^{-\frac{1}{3}} - 1)g$$

Hitrost koščka zraka na poti navzgor dobimo, če to integriramo po času:

$$v(t) = \int_0^t g(\frac{T_\star}{T_0}(1 + 3\frac{S\sigma T_\star^3}{mc_p}t)^{-\frac{1}{3}} - 1)dt$$

Uvedemo novo spremenljivko:

$$w = 1 + 3\frac{S\sigma T_\star^3}{mc_p}t$$

Nadaljujemo z integralom:

$$v(t) = g\frac{mc_p}{3S\sigma T_\star^3}\int_0^{w(t)}(\frac{T_\star}{T_0}w^{-\frac{1}{3}} - 1)dw = g\frac{mc_p}{3S\sigma T_\star^3}(\frac{3T_\star}{2T_0}(w^{\frac{2}{3}}(t) - 1) - (w(t) - 1))$$

$$v(t) = g\frac{mc_p}{3S\sigma T_\star^3}(\frac{3T_\star}{2T_0}w^{\frac{2}{3}}(t) - w(t) + 1 - \frac{3T_\star}{2T_0})$$

Višino plamena potem dobimo, če še enkrat integriramo:

$$h = \int_0^\tau v(t)dt$$

Še pred tem pa uvedimo novo spremenljivko, da bo bolj pregledno:

$$\alpha = 3\frac{S\sigma T_\star^3}{mc_p}$$

$$h = \frac{g}{\alpha^2}(\frac{9T_\star}{10T_0}(w^{\frac{5}{3}}(\tau) - 1) - \frac{1}{2}(w^2(\tau) - 1) + (1 - \frac{3T_\star}{2T_0})(w(\tau) - 1))$$

Glede na to, da τ ni velik, bi vse te člene lahko razvili do 1. potence, vendar v tem primeru dobimo $h = 0$. Zato pustimo v takšni obliki. Poiščimo kakšen je τ. Izrazimo spremembo entalpij in odtok energij z Stefanovim zakonom.

$$\tau = \frac{mc_v T_\star - mc_p T_s}{S\sigma T_p^4} = \frac{mc_p}{S\sigma T_p^4}(T_\star - T_s)$$

V imenovalcu smo uporabili približek povprečne temperature T_p. Če bi bili natančni, bi morali integrirati. Če to vstavimo v $w(\tau)$, dobimo

$$w(\tau) = 1 + 3(\frac{T_\star}{T_p})^3(\frac{T_\star}{T_p} - \frac{T_s}{T_p})$$

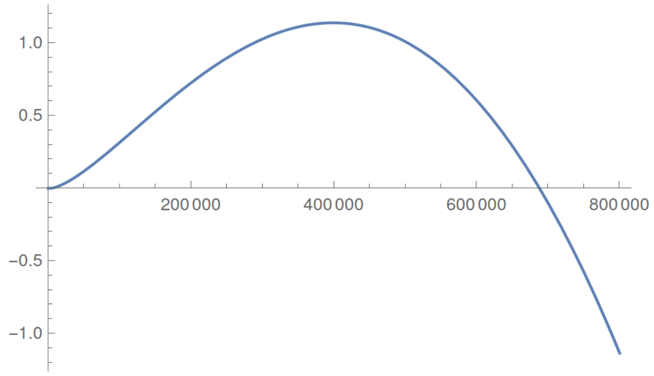
Ugotovimo še, koliko je $T_\star$. Ohranitev entalpije:

$$mc_pT_\star = mc_pT_0 + e^{-\frac{E}{RT_0}}\beta V_0 u$$

Na levi strani je entalpija kosa zraka po vžigu, na desni pa entalpija pred vžigom in energija, ki jo je prinesel vžig. Privzeli smo, da količina kisika v reakciji ni ovirajoč faktor. V to dobimo nekaj zaupanja, če si predstavljamo naslednjo situacijo. Recimo, da bi se parafinski hlapi nekako znašli v okolici neprižgane sveče. Pričakujemo, da če bi približali vžigalico, bi se hlapi hitro vžgali. Potem nismo naredili hude napake. Izrazimo lahko to:

$$\frac{T_\star}{T_0} = 1 + \frac{e^{-\frac{E}{RT_0}}\beta u}{\rho_0 c_p T_0}$$

Ta ulomek moramo torej vstaviti v izraz za $w(\tau)$, slednjega pa nato vstaviti v izraz za h. In ne pozabimo, da se javlja $T_\star$ tudi v α. Celotnega izraza raje ne pišimo. Njegova približna oblika pa je taka ($T_0 = 300K$, $T_p = 1300K$, $T_s = 1000K$, $\frac{e^{-\frac{E}{RT_0}}\beta}{\rho_0 c_p T_0} = \frac{1}{1000}m^3$)



Pripombe na izpeljavo višine plamena Vidimo, da je višina plamena funkcija številske gostote parafina pri stenju $h(u)$.

Vreden je še premislek glede naslednjega problema. Naš kos zraka, ki ga opazujemo, je zgolj eden v vrsti večih, ki grejo skozi enak proces. Vsi ti kosi zraka sevajo. Zrak absorbira sevanje in kosi zraka so eden nad drugim, zato drug drugega grejejo. Naš kos zraka torej energije ne bo le oddajal in se hladil, temveč jo odvisno od položaja tudi prejemal. Naš kos zraka v celotni poti skozi plamen ne dobi ali odda nič energije. O tem se prepričamo na tak način. Če sveča enakomerno gori, lahko v plamenu določimo odvisnost temperature od višine $T(h)$. Nad našim kosom zraka, katerega težišče je v nekem trenutku na višini h, je še eden, katerega težišče je v tem trenutku na višini $x + \delta x$. V tem trenutku da zgornji kos zraka našemu toploto dQ_1, spodnji pa mu da dQ_2. Ko se bo naš kos dvignil na mesto zgornjega, bo spodnje mesto zasedel nov kos zraka in naš kos mu bo dal toploto dQ_1 ter prejel dQ_2. Takšna simetrija velja na vseh višinah, torej naš kos zraka med dviganjem skozi enakomeren plamen ne dobi ali odda toplote. Še vseeno pa opisani efekt verjetno povzroči, da kosi zraka dosežejo višjo temperaturo in se dalj časa hladijo, od koder sledi, da je višina plamena večja. Pričakujemo lahko, da je dejanska višina plamena večja, kot jo dobimo pri našem računu.